Notizen zur Übung Theoretische Biologie – Sommer 2015

Peter Stadler und Sebastian Will

[letztes Update: 27. Mai 2015 08:27]

1 Aufgaben vom 27.4.15 (Besprechung 4.5.15)

1.1 2D Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A \cdot x$$

Gebe das Lösungsverhalten als Funktion von $\operatorname{Tr} A$ und $\det A$ an. In welchen Regionen (eines $\operatorname{Tr} A$ - $\det A$ Diagramms ist das Verhalten stabil bzw. instabil; wo gibt es Sattelpunkte; wo irrationale Eigenwerte?

1.2 Lottka-Volterra-Gleichung – Räuber-Beute-System

$$\dot{b} = b(\alpha - \beta r - \gamma b)$$
$$\dot{r} = r(\delta + \epsilon b - \zeta r)$$

Zeige die Existenz und Stabilität des inneren Fixpunkts a) **mit und** b) **ohne** intraspezifische Konkurrenz.

1.3 Logistische Gleichung

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$$

Langzeitverhalten für unterschiedliche α per Simulation; erstelle das Feigenbaumdiagramm.

2 Aufgabe vom 4.5.15: Lorenz-Attraktor (Besprechung 11.5.15)

Das Lorenz-System wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= a(Y - X) \\
\dot{Y} &= X(b - Z) - Y \\
\dot{Z} &= XY - cZ
\end{aligned}$$

Betrachte das System zunächst für die Parameter: $a = 10, b = 28, c = 8/3$.

Aufgaben:

- Löse das Differentialgleichungssystem numerisch **a)** nach dem Euler-Verfahren und **b)** nach dem Runge-Kutta Verfahren; Plotte (jeweils) den Attraktor. Wie verhält sich das System, wenn b variiert wird? Bitte ein paar bs ausprobieren und die Plots als PDFs zur Übung mitbringen.
- Einen Poincare Schnitt basteln, i.e., irgendwo eine Ebene durch den Attraktor legen und die Durchstosspunkte ausrechnen. (Einfach per linearer Regression aus einem paar benachbarter Punkte auf der Trajectorie, die auf verschiedenen Seiten der Schnittebene liegen).
- Wiederkehr-Abbildung: Eine beliebige Koordinatenrichtung in der Schnitt-Ebene auswaehlen, sagen wir u, und dann fuer zeitlich aufeinanderfolgende Durchstosspunkte die Wiederkehrabbildung plotten [also y-achse ist jetzt u-Koordinate, x-Achse ist die u-Koordinate vor vorigen Durchstosspunkte]. Was faellt auf?

3 Aufgabe vom 11.5.2015: Brüsselator (Besprechung: 1.6.2015)

Gegeben ist der Brüsselator als Reaktions-Diffusions-System:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= D_u \nabla^2 u + 1 - (b+1)u + au^2 v\\ \dot{v} &= D_v \nabla^2 v + bu - au^2 v.\end{aligned}$$

[Dieses System ergibt sich aus den Diffusionstermen $D_u \nabla^2 u$ bzw. $D_v \nabla^2 v$ und den Brüsselatorreaktionsgleichungen

$$\begin{aligned}A &\longrightarrow U\\ 2U + V &\longrightarrow 3U\\ B + U &\longrightarrow V + C\\ U &\longrightarrow D,\end{aligned}$$

wenn man annimmt, dass alle Raten 1 sind und A und B in starkem Überschuss vorhanden sind, so dass sich ihre Konzentrationen nie verändern.]

a und b sind Konstanten; u und v sind die von Raum $\vec{x}$ und Zeit t abhängigen (einheitslose) Konzentrationen von U und V; D_u und D_v sind Diffusionskonstanten. ∇ bezeichnet den Nabla-operator; also ∇^2, den Laplace-Operator.

- Analysieren sie die Stabilität der homogenen Lösung (=Fixpunkt im homogenen System, d.h. $\vec{x}$-unabhängig, ohne Diffusionsterme) im Gesamtsystem.
- Betrachten sie das System für 1-dimensionalen Raum; ∇^2 bildet dann die 2. Ableitung nach der Raumkoordinate x. Vereinfacht erhält man also

$$\begin{aligned}\dot{u} &= D_u u'' + 1 - (b+1)u + au^2 v\\ \dot{v} &= D_v v'' + bu - au^2 v.\end{aligned}$$

  Simulieren sie das System für verschiedene Parameter, wobei sie den Raum in Bins unterteilen und numerisch nach der Eulermethode lösen. Bitte die Simulationsergebnisse plotten und mitbringen.