3 Aufgabe vom 11.5.2015: Brüsselator (Besprechung: 1.6.2015)

Gegeben ist der Brüsselator als Reaktions-Diffusions-System:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= D_u \nabla^2 u + 1 - (b+1)u + au^2 v \\ \dot{v} &= D_v \nabla^2 v + bu - au^2 v.\end{aligned}$$

[Dieses System ergibt sich aus den Diffusionstermen $D_u \nabla^2 u$ bzw. $D_v \nabla^2 v$ und den Brüsselatorreaktionsgleichungen

$$\begin{aligned}A &\longrightarrow U \\ 2U + V &\longrightarrow 3U \\ B + U &\longrightarrow V + C \\ U &\longrightarrow D,\end{aligned}$$

wenn man annimmt, dass alle Raten 1 sind und A und B in starkem Überschuss vorhanden sind, so dass sich ihre Konzentrationen nie verändern.]

a und b sind Konstanten; u und v sind die von Raum $\vec{x}$ und Zeit t abhängigen (einheitslose) Konzentrationen von U und V; D_u und D_v sind Diffusionskonstanten. ∇ bezeichnet den Nabla-operator; also ∇^2, den Laplace-Operator.

- Analysieren sie die Stabilität der homogenen Lösung (=Fixpunkt im homogenen System, d.h. $\vec{x}$-unabhängig, ohne Diffusionsterme) im Gesamtsystem.
- Betrachten sie das System für 1-dimensionalen Raum; ∇^2 bildet dann die 2. Ableitung nach der Raumkoordinate x. Vereinfacht erhält man also

  $$\begin{aligned}\dot{u} &= D_u u'' + 1 - (b+1)u + au^2 v \\ \dot{v} &= D_v v'' + bu - au^2 v.\end{aligned}$$

  Simulieren sie das System für verschiedene Parameter, wobei sie den Raum in Bins unterteilen und numerisch nach der Eulermethode lösen. Bitte die Simulationsergebnisse plotten und mitbringen.